Matematikus gyakorlat, második évfolyam, első félév

Nyolcadik alkalom (2002. november 19–21)

Egy főideálgyűrű feletti M mátrix k-adik *determinánsosztójának* nevezzük az összes $k \times k$-as részmátrix determinánsainak legnagyobb közös osztóját, ennek jele $\Delta_k(M)$; $\Delta_0(M) = 1$. A k-adik *elemi osztó* $\Delta_k(M)/\Delta_{k-1}(M)$, illetve nulla, ha $\Delta_{k-1}(M) = 0$.

1. *Legyen $M = \mathbb{R}^3$ a $pv = p(A)v$ definícióval $\mathbb{R}[x]$-modulus, ahol*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{és} \qquad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Igazoljuk, hogy u generálja M-et (azaz M ciklikus).

b) Adjunk meg egy „szép" bijekciót M részmodulusai és $x(x-1)^2$ osztói között.

2. *Az alább megadott M modulusok megadott X generátorrendszeréhez készítsük el az alaptétel bizonyításában használt mátrixot, hozzuk ezt normálalakra, és ennek alapján bontsuk fel M-et ciklikus modulusok direkt összegére.*

a) $M = \mathbb{Z}_6^+$ a $\mathbb{Z}$ felett, $X = \{2, 3\}$.

b) $M = \mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_3^+$ a $\mathbb{Z}$ felett, $X = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.

c) $M = \mathbb{C}^n$ mint a $\mathbb{C}[x]$ feletti, az alább megadott mátrixokhoz tartozó szokásos modulus, X pedig $\mathbb{C}^n$ szokásos bázisa.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

3. *Hogyan olvashatók le a determinánsosztók és az elemi osztók a mátrix normálalakjából? Mutassuk meg, hogy elemi átalakítások során a determinánsosztók (asszociáltság erejéig) nem változnak, és ezért a normálalak egyértelmű.*

4. *Az alábbiakban megadjuk egy-egy komplex elemű (ismeretlen) karakterisztikus mátrix determinánsosztóit (összesen 6 mátrixét). Döntsük el, van-e ilyen mátrix, és ha igen, akkor adjuk meg a minimálpolinomját és a Jordan-féle normálalakját.* $\{1, 1, x^2\}$, $\{1, x, x^2, x^3\}$, $\{1, 1, x, x^3\}$, $\{1, 1, x^2, x^3\}$, $\{1, 1, 1, x^3\}$, $\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, x, x^2(x-1)^2, x^5(x-1)^4\}$.

5. *Adjuk meg az alábbi mátrixokhoz tartozó karakterisztikus mátrix normálalakját, és ennek alapján számítsuk ki minimálpolinomjukat és Jordan-alakjukat.*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -3 & -4 & 1 \\ 6 & 9 & -2 \\ 15 & 24 & -5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. *Igazoljuk, hogy végtelen test felett egy lineáris transzformációnak akkor és csak akkor van véges sok invariáns altere, ha minimálpolinomjának foka megegyezik a tér dimenziójával. Hány invariáns altér van ilyenkor?*

7. *Legyen R főideálgyűrű, M egy unitér R-modulus, és $c_1, \ldots, c_k, d_1, \ldots, d_\ell$ bázis M-ben. Tegyük fel, hogy $p \in R$ prím, és c_i rendje p^{α_i}, ahol $\alpha_i > 0$, viszont a d_j elemek rendje nem osztható p-vel. Bizonyítsuk be, hogy $M[p]$-ben, mint az $R/(p)$ test fölötti vektortérben, bázist alkotnak a $p^{\alpha_i - 1}c_i$ elemek ($1 \le i \le k$).*