Matematikus gyakorlat, második évfolyam, első félév

Hetedik alkalom (2002. november 12–14)

Ha M egy R-modulus, és $X \subseteq M$, akkor $\operatorname{ann}(X) = \{r \in R \mid rX \subseteq \{0\}\}$ az X *annullátora*. Az M modulus *hű*, ha $\operatorname{ann}(M) = \{0\}$. Az $\{m\}$ annullátorát (és ha R főideálgyűrű, akkor ennek az ideálnak a generátorelemét is) az $m \in M$ elem *rendjének* nevezzük, jele $o(m)$.

1. *Modulusok, illetve unitér modulusok-e az alábbi struktúrák? Határozzuk meg a részmodulusokat, és a rendeket is, valamint, hogy mikor hű a kapott modulus.*

a) *Egy A Abel-csoport $\mathbb{Z}$ felett, ahol $n \circ a = na$ jelentése a szokásos.*

b) *Egy m exponensű A Abel-csoport $\mathbb{Z}_m$ felett, ahol $n \circ a = na$ jelentése a szokásos.*

c) *Ha T test, akkor T^n a $T^{n\times n}$ felett a mátrix-vektor szorzásra.*

d) *Ha V vektortér a T test felett, és $A \in \operatorname{Hom}(V)$, akkor V a $T[x]$ felett a $p \circ v = p(A)v$ szorzásra. Hogyan kapcsolódik a rend fogalma a tavaly tanult $m_{A,v}$ polinomokhoz?*

e) *Ha S részgyűrűje R-nek, akkor R az S felett, ahol az összeadás az R-beli összeadás, és $s \circ r = sr$ (R-beli szorzás).*

f) *Ha S balideálja R-nek, akkor S az R felett, ahol az összeadás az S-beli összeadás, és $r \circ s = rs$ (R-beli szorzás).*

2. *Mutassuk meg, hogy $\operatorname{ann}(X)$ balideál, és ha X részmodulus, akkor kétoldali ideál. Vezessük le ebből, hogy balideál baloldali annullátora kétoldali ideál.*

3. *Igazoljuk, hogy ha M egy R-modulus, akkor M hű modulussá tehető $R/\operatorname{ann}(M)$ fölött.*

4. *Legyen A Abel-csoport, és R az A endomorfizmusainak gyűrűje a pontonkénti összeadásra és a kompozícióra. Mutassuk meg, hogy a $\varphi \circ a = \varphi(a)$ az A-t baloldali R-modulussá teszi. Igazoljuk azt is, hogy az A akkor és csak akkor tehető hű modulussá egy S gyűrű fölött, ha S izomorf az R egy részgyűrűjével.*

5. *Tegyük $\mathbb{R}$ additív csoportját modulussá $\mathbb{R}[x]$ felett kétféleképpen. Az első modulus szorzása $p(x) \circ r = p(1)r$, a másodiké $p(x) \circ r = p(2)r$. Izomorf modulusokat kaptunk-e?*

6. *Legyen R egységelemes gyűrű és M baloldali unitér R-modulus, mely egy elemmel generálható (azaz ciklikus). Igazoljuk, hogy M izomorf az ${}_RR$ modulusnak egy J részmodulusa (azaz balideálja) szerinti faktormodulusával, és adjunk meg egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést M faktormodulusai, és R-nek a J-t tartalmazó balideáljai között.*

7. *Az 1/d feladatban szereplő modulus milyen A esetén ciklikus, ha a V kétdimenziós?*

8. *Általánosítsuk a hatvány rendjének képletét főidálgyűrű feletti modulusokra.*

9. *Igazoljuk, hogy ha R főideálgyűrű, és M egy R-modulus, akkor azok az M-beli elemek, melyek rendje nem nulla, egy részmodulust alkotnak (ez az M* **torzió-részmodulusa***). Igaz-e, hogy az eszerint vett faktormodulus torziómentes (azaz minden elem rendje nulla)?*

10. *Igaz-e főideálgyűrű fölött, hogy ciklikus modulus része is ciklikus? Két ciklikus modulus direkt szorzata mikor lesz ciklikus?*

11. *Bázist alkot-e a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ csoportban $\{(1,2),(1,1)\}$?*

FORDÍTS!

12. *Igaz-e, hogy egy erős értelemben vett bázis mindig szabad generátorrendszer? (Az „erős értelemben” azt jelenti, hogy $\sum r_i b_i = 0 \implies r_i = 0$, és nem csak $r_i b_i = 0$).*

13. *Mutassuk meg, hogy az alábbi megfeleltetés gyűrű-izomorfizmus (sőt $\mathbb{R}$ feletti algebra-izomorfizmus) a kvaterniótest, és a $\mathbb{C}^{2\times 2}$ mátrixgyűrű egy részgyűrűje között. Igazoljuk ennek felhasználásával, hogy a kvaterniók tényleg gyűrűt alkotnak.*

$$a + bi + cj + dk \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \qquad (a,b,c,d \in \mathbb{R}).$$

14. *Legyen $\alpha = a + bi + cj + dk$ kvaternió $(a,b,c,d \in \mathbb{R})$, és $\overline{\alpha} = a - bi - cj - dk$ az α konjugáltja. Számítsuk ki az α^2 és az $\alpha \cdot \overline{\alpha}$ szorzatokat.*

15. *Határozzuk meg az $i+j+k$ kvaternió inverzét, az $i+j$ kvaternió minimálpolinomját, majd adjuk meg az x^2-1 és az x^2+1 polinomok összes gyökeit a kvaterniótestben.*

16. *Mutassuk meg, hogy a Frobenius-tétel feltételei mind szükségesek, sőt adjunk meg olyan példákat, amelyek azt mutatják, hogy*
- *a) $\mathbb{R}$ felett van olyan végtelen dimenziós, nullosztómentes algebra, ami nem test;*
- *b) $\mathbb{R}$ felett van olyan végtelen dimenziós, nullosztómentes algebra, ami test, de nem a tételben felsorolt algebrák valamelyike;*
- *c) $\mathbb{R}$ felett van véges dimenziós, nem nullosztómentes algebra (ami tehát nem test);*
- *d) alkalmas test felett van akárhány, de véges dimenziós nullosztómentes algebra.*

17. *Bizonyítsuk be, hogy a lineáris függésre, függetlenségre és dimenzióra vonatkozó tételek érvényben maradnak ferdetest fölött is.*

18. *Legyen D ferdetest. Mutassuk meg, hogy a $D^{n\times n}$ centruma a dE skalármátrixokból áll, ahol $d \in Z(D)$ és E az egységmátrix.*

19. *Legyen $E \subseteq X \times Y$ páros gráf, $A \subseteq X$ esetén $A^\sharp$ azon $y \in Y$ elemek halmaza, melyek A minden elemével össze vannak kötve, és definiáljuk $B \subseteq Y$ esetén a $B^\flat \subseteq X$ halmazt analóg módon. Az A illetve B lezártja $A^{\sharp\flat}$ illetve $B^{\flat\sharp}$. Igazoljuk az alábbi állításokat.*
- *a) $A_1 \subseteq A_2 \subseteq X \implies A_1^\sharp \supseteq A_2^\sharp$ és $B_1 \subseteq B_2 \subseteq Y \implies B_1^\flat \supseteq B_2^\flat$.*
- *b) $A^{\sharp\flat\sharp} = A^\sharp$ és $B^{\flat\sharp\flat} = B^\flat$, speciálisan $A^{\sharp\flat}$ és $B^{\flat\sharp}$ már zártak.*
- *c) Az X illetve az Y zárt részhalmazai egymással kölcsönösen egyértelmű, rendezésfordító megfeleltetésben állnak. (Az ilyen megfeleltetést Galois-kapcsolatnak nevezzük.)*

20. *Legyen V véges dimenziós vektortér egy ferdetest fölött, és $R = \mathrm{Hom}(V)$. Húzzunk élt $v \in V$ és $A \in R$ között pontosan akkor, ha $Av = 0$. Bizonyítsuk be, hogy a kapott Galois-kapcsolatban a zárt halmazok pontosan az alterek, illetve a balideálok.*

21. *Legyen T ferdetest, $V = T^n$ (mint baloldali vektortér T fölött), és $R = T^{n\times n}$ a teljes mátrixgyűrű. Bizonyítsuk be, hogy R balideáljai és V alterei között kölcsönösen egyértelmű, rendezéstartó megfeleltetés a következő: egy altérhez azoknak a mátrixoknak a halmaza tartozik, amelyek minden sora az adott altérnek eleme. Mutassuk meg az analóg állítást jobbideálokra/oszlopokra.*

22. *Legyen R egységelemes gyűrű. Mutassuk meg, hogy az $R^{n\times n}$ teljes mátrixgyűrű ideáljai pontosan az $I^{n\times n}$ gyűrűk, ahol I ideálja R-nek. Speciálisan ferdetest feletti teljes mátrixgyűrű egyszerű gyűrű.*