Matematikus gyakorlat, második évfolyam, első félév
Hatodik alkalom (2002. november 5–7)

1. *Igaz-e, hogy a $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ az $x_1, \ldots, x_n$ által generált szabad kommutatív gyűrű?*

2. *Igazoljuk, hogy ha R gyűrű, akkor az $(r, n)(s, m) = (rs + rm + sn, nm)$ szorzásra nézve az $R^+ \times \mathbb{Z}^+$ csoport egységelemes gyűrű, mely tartalmaz R-rel izomorf részgyűrűt.*

3. *Legyen R gyűrű. Igazoljuk, hogy R egy részhalmaza akkor és csak akkor ideál, ha alkalmas gyűrűhomomorfizmus magja. Bizonyítsuk be a homomorfizmus-tétel, illetve a két izomorfizmus-tétel gyűrűelméleti változatát. Definiáljuk gyűrűk direkt szorzatát a csoportokéval analóg módon, és mutassuk meg, hogy a direkt szorzat csoportokra adott belső jellemzése gyűrűkre is érvényben marad, ha normálosztó helyett ideált írunk.*

4. *Igazoljuk, hogy ha R kommutatív, egységelemes gyűrű, akkor*
- a) $(a_1, \ldots, a_n)(b_1, \ldots, b_m) = (\ldots, a_i b_j, \ldots)$;
- b) *a P ideál akkor és csak akkor prímideál, ha tetszőleges A és B ideálokra $AB \subseteq P$ akkor és csak akkor teljesül, ha $A \subseteq P$ vagy $B \subseteq P$;*
- c) *tetszőleges ideál radikálja is ideál;*
- d) *ha R főideálgyűrű, akkor P pontosan akkor prímideál, ha a generátora prím, és pontosan akkor primér, ha a generátora egy prímhatvány.*

5. *Mutassuk meg, hogy a $\mathbb{C}[x, y]$ gyűrű $I = (x^2, xy)$ ideálja nem primér, de tetszőleges p és q polinomokra igaz, hogy ha $pq \in I$, akkor p és q valamelyike belehatványozható I-be, és hogy az I radikálja prímideál. Melyik ideál ez a radikál?*

6. *Igazoljuk, hogy a $\mathbb{C}[x, y]$ gyűrű (x^2, y) ideálja primér, de nem hatványa a radikáljának.*

7. *Mutassuk meg, hogy a $\mathbb{C}[x, y, z]$ gyűrű (xy, z) ideálja nem állítható elő primér ideálok szorzataként. Állítsuk elő primér ideálok metszeteként.*

8. *Állítsuk elő a $\mathbb{C}[x, y]$ gyűrű alábbi ideáljait primér ideálok metszeteként, és a felbontás tényezőinek adjuk meg a radikálját is:* (xy), (xy^2), (x^2, xy), $(x^2 + y^2)$, (x^2, y^2), (x^2, y^3), (x^2, xy, y^2), (x^2, xy^2, y^3), (x^3, x^2y^2, xy^3).

9. *Legyen R egységelemes, kommutatív Noether-gyűrű. Igazoljuk az alábbi állításokat.*
- a) *Minden primér ideál tartalmazza a radikáljának egy hatványát.*
- b) *Ha Q_i véges sok primér ideál, melyek mindegyikének a radikálja ugyanaz a P prímideál, akkor a Q_i ideálok metszete is primér, és a metszet radikálja szintén P.*
- c) *Ha Q_i véges sok primér ideál, melyek radikáljai páronként különbözők, akkor a Q_i ideálok metszete, ha rövidíthetetlen, akkor nem primér.*

10. *Igazoljuk, hogy ha R kommutatív egységelemes gyűrű, és $R[x]$ Noether, akkor R is.*

11*. *Legyen R egységelemes integritási tartomány. Igazoljuk az alábbi állításokat.*
- a) *$R[x]$ akkor és csak akkor főideálgyűrű, ha R test.*
- b) *Ha R alaptételes, és minden nem nulla ideálja véges indexű, akkor R főideálgyűrű.*

12*. *Mutassuk meg, hogy egy kommutatív, egységelemes gyűrű pontosan akkor Noether, ha minden prímideálja végesen generált, és pontosan akkor főideálgyűrű, ha minden prímideálja főideál.*