Mat-alkmat gyakorlat, második évfolyam, első félév

Első alkalom — megoldásvázlatok (2002 ősz)

1. Átszorozva, és a $\sqrt[3]{2}$ hatványai szerint rendezve $1 = (1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})(a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}) = (a + 2b + 2c) + (a + b + 2c)\sqrt[3]{2} + (a + b + c)\sqrt[3]{4}$. Az 1 ilyen alakú felírása egyértelmű, és ezért $a + 2b + 2c = 1$, $a + b + 2c = 0$, $a + b + c = 0$. Az egyenletrendszert megoldva az eredmény $\sqrt[3]{2} - 1$. (Ezt számolás nélkül is leolvashattuk volna az $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ azonosságból. De a fenti módszer általános, minden esetben működik.)

2. Azt tudjuk, hogy $\theta^3 + 3\theta + 1 = 0$. Innen $\theta^5 + 3\theta^3 + \theta^2 = 0$. Ebből ki lehet fejezni θ^5-t, és így $\theta^5 + 2\theta^3 = -3\theta^3 - \theta^2 + 2\theta^3 = -\theta^3 - \theta^2 = -\theta^2 + 3\theta + 1$. Látható, hogy θ valamennyi polinomja redukálható legfeljebb másodfokúvá úgy, hogy a legmagasabb fokú tagot mindig alacsonyabb fokúval helyettesítjük.

A $\theta/(\theta - 3)$ kiszámításakor az eredményt $a + b\theta + c\theta^2$ alakban keressük, keresztbe szorzunk, nullára redukálunk, a θ kapott polinomját redukáljuk legfeljebb másodfokúvá, majd az együtthatókat nullává tesszük, és a kapott lineáris egyenletrendszert megoldjuk. Az eredmény: $\theta/(\theta - 3) = (1/37) - (9/37)\theta - (3/37)\theta^2$. (Számítógéppel közelítőleg ellenőrizhető az eredmény, mert $\theta \approx -0,322185$.)

3. A π transzcendens, minimálpolinomja a 0. Az $1 + i$-hez olyan polinomot kell keresni, melynek ez gyöke. Ehhez legyen $1 + i = x$, ekkor $i = x - 1$, négyzetre emelve és rendezve $x^2 - 2x - 2 = 0$. Ennek a polinomnak tehát gyöke az $1 + i$, és ez akkor lesz a minimálpolinom, ha irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett. Ez látszik abból, hogy másodfokú, és nincs gyöke $\mathbb{Q}$-ban. Ha $x = \sqrt{2} + i$, akkor $(x - i)^2 = 2$, azaz $x^2 - 3 = 2ix$, még egyszer négyzetre emelve és rendezve $x^4 + 2x^2 + 9$. E polinom irreducibilitása ugyanúgy látható be, mint az $x^4 + 9$ polinomé az első félévben: $\mathbb{C}$ felett kell először felbontani. (Láthatjuk, hogy ezzel a technikával az összetett gyökös kifejezésekhez néha tudunk olyan polinomot találni, aminek az gyöke, ha a megfelelő átrendezések után mindig hatványozunk.) Ennek alapján $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ minimálpolinomja $x^4 - 10x^2 + 1$ (irreducibilitását az első félévben beláttuk), a $\sqrt[3]{2}$-é $x^3 - 2$, az $1 + \sqrt[3]{2}$-é $(x - 1)^3 - 2$ (ami $x^3 - 2$ eltoltja, ezért irreducibilis), $\sqrt[3]{2 + \sqrt{2}}$-é pedig $x^6 - 4x^3 + 2$, ami a Schönemann-Eisenstein miatt irreducibilis.

Ha $u = \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}}$, $v = \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}$, és $x = u + v$, akkor vaktában elindulva egy nagyon nagy fokú polinom keletkezne. Köbre emelve $x^3 = 14 + 3uv(u + v)$. De $uv = \sqrt[3]{49 - 50} = -1$ és $u + v = x$, ezért $x^3 + 3x - 14 = 0$ is igaz. De ez még mindig nem a minimálpolinom, hiszen gyöke a kettő. Mivel ez az egyetlen valós gyök (ami például az $x - 2$ kiemelésével adódik), és $u + v$ valós, ezért $u + v = 2$, minimálpolinomja $x - 2$.

A $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ azonosságból kapjuk, hogy $\cos 20^\circ$ minimálpolinomja $x^3 - (3/4)x - (1/8)$ (ez a racionális gyökteszt miatt irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett). Végül az n-edik primitív egységgyökök közös minimálpolinomja az n-edik körosztási polinom, hiszen ez irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett, és normált.

7. Felhasználjuk, hogy $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \subseteq K(\beta_1, \ldots, \beta_k)$ akkor és csak akkor, ha mindegyik α_i kifejezhető a β_j-kből és K elemeiből a négy alapművelet segítségével.

- A $\sqrt{6}$ kifejezhető $\sqrt{3}$-ból, $\sqrt{2} + 1$-ből és racionális számokból, mert $\sqrt{6} = \sqrt{3}((\sqrt{2} + 1) - 1)$.
- Nyilván $K(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}) \subseteq K(\sqrt[6]{2})$, hiszen $\sqrt{2}$ is és $\sqrt[3]{2}$ is hatványa $\sqrt[6]{2}$-nek. Megfordítva, $\sqrt[6]{2} = (\sqrt{2})/(\sqrt[3]{2})$.
- Belátjuk, hogy $c = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ jó. Nyilván ez eleme $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$-nak, kérdés, hogy $\sqrt{2}$ és $\sqrt{3}$ kifejezhető-e c-vel és racionális számokkal. Mivel $c^2 = 5 + 2\sqrt{6}$, ezért $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}(c)$. Továbbá $c^3 = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + 3\sqrt{6}c$, ezért innen $2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(c)$. De ezzel és $c = \sqrt{2} + \sqrt{3}$-mal nyilván kifejezhető a $\sqrt{2}$ és a $\sqrt{3}$.
- A $\sqrt{2} = a + b\sqrt{3}$-ból négyzetre emelve és átrendezve $2ab\sqrt{3} = 2 - a^2 - 3b^2$ adódik. Ha ezt ab-vel eloszthatnánk, akkor az jönne ki, hogy $\sqrt{3}$ racionális. Ez ellentmondás, tehát a vagy b nulla. A második esetben $\sqrt{2} = a$, azaz racionális, az nem lehet. De $b = 0$ sem lehet, mert abból $\sqrt{6}$ racionalitása adódna. (Egy pozitív egész k-adik gyöke csak akkor racionális, ha minden prím k-val osztható kitevőn szerepel.)
- $\alpha, \beta \in K(\alpha, \beta)$, és mivel ez test, tartalmazza $\alpha\beta$-t is. Ezért $K(\alpha, \alpha\beta) \subseteq K(\alpha, \beta)$. Megfordítva, $\alpha \neq 0$ miatt a β, ami $\alpha\beta$ és α hányadosa, benne van a $K(\alpha, \alpha\beta)$ testben. De α is benne van, így $K(\alpha, \alpha\beta) \supseteq K(\alpha, \beta)$.

Megjegyezzük, hogy ezzel másik bizonyítást kaptunk arra, hogy $x^4 - 10x^2 + 1$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett. Ugyanis $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$. Az első bővítés foka 2, mert $\sqrt{2}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ felett $x^2 - 2$, azaz másodfokú. A második bővítés is legfeljebb másodfokú, hiszen $\sqrt{3}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ felett osztója $x^2 - 3$-nak, de nem elsőfokú, mert $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Tehát a szorzástétel miatt a két bővítés egymásutánja negyedfokú. Így $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ foka 4 lesz $\mathbb{Q}$ felett. Ezért ha egy negyedfokú racionális együtthatós polinomnak gyöke, akkor az a minimálpolinom konstansszorosa lehet csak, és így irreducibilis.