

BSc Matematika Alapszak, 2020.

Matematikai Intézet,

Természettudományi Kar,

Eötvös Loránd Tudományegyetem.

Algebra1 — intenzív változat

- **Óraszám (ea+gy):** 2 + 2
- **Specializáció:** közös
- **Kredit (ea+gy):** 3 + 3
- **Számonkérés:** kollokvium + gyak. jegy
- **Tárgykód (ea, gy):** algebr1i0_m17ea, algebr1i0_m17ga
- **Ajánlott félév:** 1
- **Státusz:** kötelező

Tantárgyfelelős

- Kiss Emil, Algebra és Számelmélet Tanszék, Matematikai Intézet.

Előfeltételek

Az előadás előfeltételei:

- *Gyenge:* a gyakorlat

Megjegyzések

- Az Algebra1 normál és intenzív változata egymás között átjárható.
Ennél a tárgynál a gyakorlaton is legalább 50%-ban az elméleti anyag elmélyítése történik.

A tematikát kidolgozta:

- Kiss Emil, Algebra és Számelmélet Tanszék, Matematikai Intézet.

Szükséges előismeretek

A tárgy a középiskolai matematika anyag elmélyült ismeretét követeli.

A tantárgy célkitűzése

A tárgy célja az alapvető algebrai ismeretek bemutatása (komplex számok, polinomok, mátrixok és determinánsok). Az intenzív változat azt jelenti, hogy az akkreditált tematikában szereplő fogalmakat, tételeket, módszereket teljes mélységükben, bizonyításokkal együtt, viszonylag absztrakt módon, az egyszerűbb anyagrészekben gyorsan áthaladva tárgyaljuk.

Irodalom

- **Freud Róbert:** *Lineáris algebra*. ELTE Eötvös kiadó, 2009.
- **Kiss Emil:** *Bevezetés az algebrába*. TypoTeX Kiadó, 2007. [Információk, kiegészítések.](#)

Tematika

- Komplex számok. A komplex számok (mint formális kifejezések, bevezetés rendezett párokkal is). Valós és képzetes rész, ezek egyértelműsége. Összeadás, kivonás, szorzás. Konjugált, abszolút érték, tulajdonságaik, kapcsolatuk. Minden nem nulla komplex számmal lehet osztani, nullosztómentesség. A műveletek tulajdonságai: a komplex számok testet alkotnak. Négyzetgyökvonás, a másodfokú egyenlet megoldása.
- A komplex számsík, komplex szám szöge és trigonometrikus alakja. Összeadás mint vektorösszeadás. Szorzás és osztás trigonometrikus alakban. Egyes geometriai transzformációk kifejezése komplex számokkal. A háromszög-egyenlőtlenség. Geometriai feladatok megoldása a komplex számsíkon.
- Komplex szám rendje. Komplex egységgyökök és primitív n -edik egységgyökök, trigonometrikus alakjuk, számuk. Gyökvonás komplex számból, az n -edik gyökök meghatározása és geometriai elhelyezkedése. A hatvány rendjének képlete.

- Polinomok. Kommutatív, egységelemes gyűrű fölötti polinom mint formális kifejezés. Polinomok egyenlősége, együtthatói, főegyütthatója, normált polinom. Összeadás, nullapolinom, kivonás, szorzás. Nem nulla polinom foka, a fokszám változása a műveleteknél. A polinomok gyűrűje, nullosztómentesség.
- A polinomfüggvény fogalma. Polinom gyöke, a Horner-elrendezés, a gyöktényező kiemelhetősége. A gyökök maximális száma, a polinomok azonossági tétele. Végtelen nullosztómentes gyűrű fölött a polinomfüggvények és a polinomok kapcsolata kölcsönösen egyértelmű, de véges gyűrű fölött nem. Az algebra alaptétele (bizonyítás nélkül): komplex fölött minden nem konstans polinomnak van gyöke. Gyök multiplicitása. Egy n -edfokú komplex együtthatós polinomnak multiplicitásokkal számolva pontosan n komplex gyöke van. A többszörös gyökök és a formális derivált kapcsolata tetszőleges test fölött. A racionális gyökteszt. A Lagrange- és a Newton-interpoláció.
- A többhatározatlanú polinom fogalma. A gyökök és együtthatók összefüggése. Fok, homogén polinom, lexikografikus rendezés. A szimmetrikus polinomok alaptétele, egyértelműség. Hatványösszegek.
- A polinomok számelmélete. Számelméleti fogalmak gyűrűben: oszthatóság, egység, asszociált, felbonthatatlan (más néven irreducibilis), prímtulajdonságú elem, kitüntetett közös osztó és többszörös, ezek egyértelműsége, képletük alaptételes gyűrűben. A polinomgyűrű egységei. Minden olyan polinommal lehet maradékosan osztani, amelynek a főegyütthatója egység. A maradékos osztás egyértelmű. Az euklideszi algoritmus, az irreducibilis és prím elemek kapcsolata. A számelmélet alaptétele érvényes tetszőleges test fölötti polinomok gyűrűjében, az egész számok számelméletének mintájára.
- Test fölött az irreducibilis polinomok azok a nem konstans polinomok, melyek nem bonthatók alacsonyabb fokúak szorzatára. Minden elsőfokú polinom irreducibilis; a másod- és harmadfokúak pontosan akkor irreducibilisek, ha nincs az alaptestben gyökük. Ha egy legalább másodfokú polinomnak van az alaptestben gyöke, akkor nem irreducibilis (de ha nincs gyöke, lehet reducibilis). Az irreducibilis polinomok komplex

fölött az elsőfokúak. Egy valós együtthatós polinomnak minden komplex szám ugyanannyiszoros gyöke, mint a konjugáltja. Minden páratlan fokú valós együtthatós polinomnak van valós gyöke. A valós fölötti irreducibilis polinomok leírása.

- A Schönemann-Eisenstein-kritérium a racionális számok teste fölötti irreducibilitásra. Következmény: racionális fölött akárhányszor fokú irreducibilis polinom létezik. A körosztási polinom; rekurzív képlete, kiszámítása, ez egész együtthatós. A körosztási polinom irreducibilis. További módszerek az irreducibilitás eldöntésére. Gauss-lemma, az irreducibilis polinomok jellemzése az egész együtthatós polinomok gyűrűjében, itt is érvényes a számelmélet alaptétele. Általánosítás: alaptételes gyűrű fölötti polinomgyűrű is alaptételes. Alaptétel a többhatározatlanú polinomok között.
- A harmadfokú egyenlet, Cardano képlete, ebben a köbgyökvonás helyes elvégzése, Casus Irreducibilis. A negyedfokú egyenlet (csak vázlat). A rezultáns és a diszkrimináns.
- Vektorok és mátrixok. A lineáris egyenletrendszer fogalma és megoldása Gauss-eliminációval. Vezéregyesek, tilos sorok, szabad és kötött változók, a megoldások általános képlete és száma. Az egyetlen összefüggés az ismeretlenek száma, az egyenletek száma és a megoldások száma között: ha kevesebb egyenlet van, mint ismeretlen, akkor nem lehet egyértelmű a megoldás. Homogén lineáris egyenletrendszer, triviális megoldás, ha kevesebb egyenlet van, mint ismeretlen, akkor van nemtriviális megoldás. A Cramer-szabály.
- A sík vektorai, helyvektorok, összeadás és skalárral szorzás. Test fölötti oszlopvektorok, összeadás, skalárral szorzás. A sík origót fixáló egybevágósági (és hasonlósági) transzformációi összeg- és skalárszorostartók. A sík lineáris transzformációinak megadása mátrix segítségével. Vektor képének kiszámítása, mátrix és vektor szorzata. Kompozíció mátrixa, mátrixok szorzása. A mátrixszorzás asszociativitása (annak következménye, hogy a leképezések kompozíciója asszociatív). Az egységmátrix és az inverz mátrix fogalma. Mátrixok összeadása és skalárral szorzása. A mátrixműveletek tulajdonságai, a négyzetes

mátrixok egységelemes gyűrűt alkotnak. Lineáris függés és függetlenség. Mátrix rangja és kiszámítása Gauss-eliminációval. Az oszlop- és sorrang megegyezik, determinánsrang. Lineáris egyenletrendszer megoldhatóságának és a megoldás egyértelműségének jellemzése a rang segítségével.

- A determináns. A determináns mint négyzetes mátrixhoz rendelt szám bizonyos tulajdonságokkal: minden oszlopában lineáris, ha két oszlop egyenlő, akkor az eredmény nulla. Létezés és egyértelműség, a determináns képlete. A determináns oszlopcserénél előjelet vált, egy oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adva az értéke nem változik, felső háromszögmátrix determinánsa. A transzponált mátrix determinánsa megegyezik az eredeti mátrix determinánsával, így az oszlopokra megkövetelt tulajdonságok sorokra is érvényesek. A determináns kiszámítása Gauss-eliminációval. A Vandermonde-determináns. A determinánsok szorzástétele. A determináns eltűnésének jellemzése. Előjeles al-determináns, a kifejtési tétel. A ferde kifejtési tétel, az inverz mátrix képlete. Egy mátrix pontosan akkor invertálható, ha determinánsa nem nulla. Invertálás Gauss-eliminációval. A Laplace-féle kifejtés. A Cauchy-Binet formulák.
- Absztrakt algebrai alapfogalmak. Művelet, asszociativitás, kommutativitás. Csoport, gyűrű; kommutatív, egységelemes, nullosztómentes gyűrű; test. Elemi számolási szabályok. Invertálható elem, egész kitevőjű hatványok és tulajdonságaik, többszörös. Nullosztómentes gyűrűben szabad egyszerűsíteni. Minden test nullosztómentes. Részcsoport, részgyűrű. Művelettartó leképezés, példák: komplex konjugálás, maradékképzés, geometriai transzformációk.
- Összeadás és szorzás egy m modulusra nézve, a \mathbf{Z}_m gyűrű, ennek invertálható elemei az m -hez relatív prím elemek. Ez a gyűrű akkor és csak akkor nullosztómentes ha test, akkor és csak akkor, ha m prímszám.
- A binomiális együtthatók alaptulajdonságai, a binomiális tétel. Ha egy gyűrűben minden elem p -szerese nulla, akkor tagonként lehet p -edik

hatványra emelni (p prím).

- A permutáció fogalma. Kompozíció, inverz, ciklusfelbontás, a szimmetrikus csoport. Inverzió, permutáció paritása (előjele). Az előjelek szorzástétele, a páros permutációk száma.