

## BSc záróvizsga kérdések: matematikus szakirány (2010)

- 1. Véges matematika.** Kombinatorikai alapfeladatok, rekurziók, szita. Gráfok: fák, színezések, síkbarajzolhatóság, párosítások. Ramsey- és Erdős–Szekeres-tételkör. Többszörös összefüggőség, folyamok. Extremális problémák, nevezetes algoritmusok.
- 2. Számítástudomány és matematikai alapjai.** Számosságok. Axiómák, alefek. Jólrendezett halmazok, rendszámok, transzfinit indukció és rekurzió. Turing-gép. Kiszámíthatóság, nem kiszámítható problémák. **P** és **NP**. **NP**-teljesség, **NP**-teljes problémák. Véletlent használó algoritmusok, példák.
- 3. Számelmélet.** Kitüntetett közös osztó és ideálok, irreducibilitás, prímtulajdonság. A számelmélet alaptétele gyűrűkben: polinomok, Gauss-egészek, algebrai számok. Számelméleti függvények. Kongruenciák, kvadratikus maradékok, csoportelméleti vonatkozások. A prímszámok eloszlása. Nevezetes számelméleti problémák, alkalmazások.
- 4. Elemi és lineáris algebra.** Komplex számok, polinomok és gyökeik test fölött. Lineáris egyenletrendszer, determináns. Vektortér, függetlenség, dimenzió. Lineáris leképezések és mátrixaik. Sajátérték, diagonalizálhatóság, minimálpolinom. Kvadratikus alak, adjungált, az euklideszi terek speciális lineáris transzformációi.
- 5. Absztrakt algebra.** Csoport, faktorcsoport, direkt szorzat. Mátrixcsoportok, permutációcsoportok, Abel-csoportok,  $p$ -csoportok, egyszerű csoportok, szabad csoportok. Testbővítések, véges testek, alkalmazások. Féligegyszerű gyűrűk.
- 6. Euklideszi és konvex geometria.** Az egybevágósági transzformációk csoportja. Konvex halmazokra vonatkozó alaptételek, elválasztási tulajdonságok. Konvex politópok. Izoperimetrikus és izodiametrális egyenlőtlenség.
- 7. Projektív és hiperbolikus geometria.** Projektív terek és projektív transzformációk. Kettősviszony. Az egyenes és a sík projektivitásai, involúciók. Nevezetes illeszkedési tételek. Másodrendű alakzatok. A geometria axiomatikus alapjai, a párhuzamossági axióma szerepe. A hiperbolikus sík és tér.
- 8. Görbe- és felületelmélet euklideszi terekben.** Görbék görbületi függvényei, Frenet-formulák. Hiperfelületek paraméterezése. Első alapforma, felszín. Normálgörbület, főgörbületek, Gauss-görbület. Geodetikusok.
- 9. Az analízis alapjai.** A valós számok axiomatikus felépítése. Sorozatok határértéke, végtelen sorok. Függvénysorozatok és függvénysorok konvergenciája, differenciálása és integrálása. Hatványsorok. Taylor-sorok.
- 10. Egyváltozós differenciál- és integrálszámítás.** Határérték, folytonos függvények. A differenciálhatóság fogalma, geometriai jelentése. Közéértéktételek. Függvényvizsgálat, szélsőértékfeladatok. Elemi függvények. Riemann-integrál. Primitív függvény, Newton–Leibniz-formula. Az integrálszámítás alkalmazásai.
- 11. Többváltozós analízis.** Többváltozós függvények differenciálszámítása. Szélsőérték-számítás. Az inverz és implicit függvények tételei. Többszörös integrál, vonalintegrál, felületi integrál. Divergencia és rotáció; integráltételek.

- 12. Mértékelmélet.** Mérték. Lebesgue-mérték. Lebesgue- és Lebesgue–Stieltjes-integrál. Függvénysorozatok és függvénysorok integrálása. Integrálások sorrendjének felcserélése. Abszolút folytonos és szinguláris mértékek.
- 13. Komplex függvénytan.** Komplex értelemben vett differenciálhatóság. Vonalintegrál, Cauchy-integráltétel. Hatványsorba fejtés. Unicitástétel, lokális viselkedés, maximumelv. Laurent-sor. Izolált szingularitások. Reziduumszám, argumentumelv. Reguláris függvények sorozatai. Lineáris törtfüggvények. Konform leképezések alaptétele. Egész függvények. Harmonikus függvények.
- 14. Topológia.** Topologikus terek és folytonos leképezések. Homeomorfizmus, a homotopikus ekvivalencia fogalma. Összefüggő és útösszefüggő terek. Konstrukciók: szorzat, hánnyados topológiák. A fundamentális csoport. Felületek osztályozása. Lokális homeomorfizmusok felületek között.
- 15. Differenciálegyenletek.** Egzisztencia- és unicitási tételek. Lineáris differenciálegyenletek megoldásainak létezése és előállítása. Stabilitási fogalmak, lineáris rendszer stabilitása. Disztribúciók, Szobolev-terek. Peremérték feladat elliptikus egyenletekre, vegyes feladatok.
- 16. Funkcionálanalízis.** Folytonos lineáris leképezések. Hahn-, Banach- és Banach–Steinhaus-tétel. Kompakt operátorok. Hilbert-terek: Riesz-reprezentációs tétele, önadjungált operátorok, Fourier-sorok. Banach-algebrák.
- 17. Operációkutatás.** A lineáris programozás alaptételei (Farkas-lemma, dualitás tétel, korlátossági feltétel, szimplex algoritmus). Hálózati optimalizálás (maximális folyam, magyar módszer).  $TU$  mátrixok és alkalmazásaik.
- 18. Valószínűségszámítás.** Valószínűségeloszlások, függetlenség. Valószínűségi változók várható értéke, magasabb momentumok. Borel–Cantelli-lemmák. Nagy számok törvényei. Konvergenciafajták. Karakterisztikus függvény. Centrális határeloszlás tétel. A feltételes eloszlás, a feltételes várható érték. Martingálok.
- 19. Matematikai statisztika.** Tapasztalati becslések, Glivenko–Cantelli-tétel. Elégségeség, Fisher-féle információ. Pontbecslések és tulajdonságaik. Momentum módszer, maximum likelihood módszer. Bayes-becslés. Hipotézisvizsgálat. Normális eloszlás paramétereire vonatkozó próbák. Nem-paraméteres próbák.